Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\cos y}\sqrt{6x-x^2-8}=0, \\ \sqrt{\sin x}\sqrt{2-y-y^2}=0. \end{cases}$

Решение.

Из неравенства $6x-x^2+8\ge 0$ получаем: $2\le x\le 4$.

1 случай. Пусть $x = 2$ или $x = 4$. Если $x = 4$, то $\sin x<0$; если $x=2$, то $\sin x>0$. Из второго уравнения получаем: $2-y-y^2=0$, откуда $y = -2$ или $y = 1$.

Если $y = -2$, то $\cos y<0$. Если $y=1$, то $\cos y>0$. Значит, $x =2$, $y = 1$.

2 случай. Пусть теперь $2<x<4$. Тогда $6x-x^2-8>0$, и поэтому из первого уравнения получаем: $\cos y=0$.

Учтем, что $2-y-y^2\ge 0$. Тогда $-2\le y\le 1$. Из всех решений уравнения $\cos y=0$ этому условию удовлетворяет только $y=-\frac{\pi}{2}$. При этом $2-y-y^2>0$ и, из второго уравнения получаем: $\sin x=0$. Из всех решений этого уравнения интервалу $2<x<4$ принадлежит только $x=\pi$. Значит $x=\pi, y=-\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $(2;1)$, $\left(\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$.

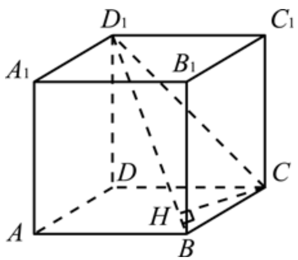
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.

Решение.

Проведем отрезок CD_1 и опустим перпендикуляр CH на BD_1. Искомое расстояние равно высоте CH прямоугольного треугольника BCD_1 с прямым углом C:

$$CH=\frac{CD_1\cdot BC}{BD_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\ge 1$.

Решение.

Так как $0<7^{-|x-3|}\le 1$ и $\log_2\left(6x-x^2-7\right)=\log_2\left(2-(x-3)^2\right)\le 1$,

переходим к системе

$$\begin{cases} \log_2\left(2-(x-3)^2\right)=1, \\ 7^{-|x-3|}=1. \end{cases}$$

Получаем: $x = 3$

Ответ: $x = 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Не сделана оценка $7^{-|x-3|}>0$ или не рассмотрен случай отрицательных множителей. Ответ верный	2
Получен верный ответ равносильными преобразованиями или с помощью оценок, но не доказано отсутствие других решений. Или при верномходе решения ответ неверный, или отсутствует за счет вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Решение.

Пусть центры окружностей O_1 и O_2, а точки касания A и B. Проведем через точку B прямую, параллельную O_1O_2. Точку пересечения этой прямой с O_1A обозначим K. Треугольник KAB прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

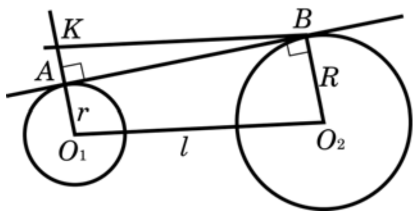


Рис. 1

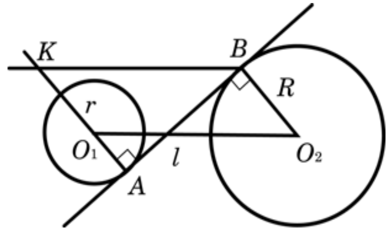


Рис. 2

1. Окружности лежат по одну сторону от касательной (рисунок 1).
2. Окружности лежат по разные стороны от касательной (рисунок 2).

Обозначим радиусы окружностей R и r, расстояние между центрами окружностей l.
В первом случае $AK = R - r$, во втором случае $AK = R + r$.
Из прямоугольного треугольника KAB находим:
в первом случае $AB = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$,
во втором случае $AB = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$.

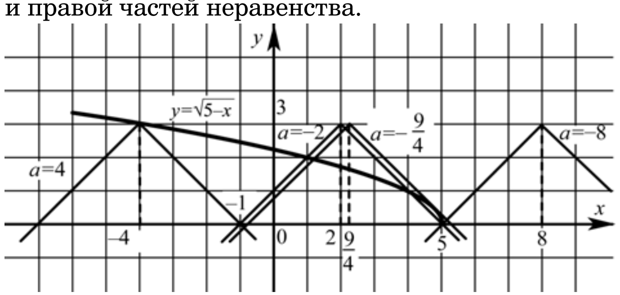
Ответ: 30 или 16.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \le 3$ является отрезок.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{5-x} \le 3 - |x+a|$, и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Рассматривая взаимное расположение графиков при разных a, получаем:

$-8 < a \le -\frac{9}{4}$ или $-2 < a < 4$.

Ответ: $\left(-8; -\frac{9}{4}\right] \cup \left(-2; 4\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери или приобретения одного из значений параметра	3
Получен ответ: $-8<a<4$ (возможно включение концов). В решении представлена правильная графическая интерпретация или соответствующие ей равносильные преобразования	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра	1
Все ситуации, отличные от описанных выше	0

C6 Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что

$$\frac{p}{q} = \frac{1234567\overbrace{888...8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999...9}_{1999}87654321}.$$

Решение.

Рассмотрим число $a = \overbrace{11...1}^{2007}$ и сложим «в столбик» числа: $a, 10a, 10^2a, ..., 10^7a$ – получим числитель исходной дроби m; а складывая числа: $a, 10a, 10^2a, ..., 10^7a, 10^8a$ – получим знаменатель – n, где $m = ap, n = aq$ (p = 11 111 111, q = 111 111 111) и числа p, q – взаимно простые.

Ответ: $\frac{11111111}{111111111}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ верный, но не доказано, что полученная дробь несократима	3
Метод решения правильный, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки	2
Решение дано для дроби с меньшим числом 8 в числителе и 9 в знаменателе и сделан верный, но необоснованный вывод относительно данной дроби	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cos 2x + 3\sin x = 1, \\ y^2\cos x + y\cos x + \dfrac{\sqrt{15}}{2} = 0. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения получаем: $2 - 4\sin^2 x + 3\sin x = 1$, откуда $4\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0$. Значит, $\sin x = 1$ или $\sin x = -\dfrac{1}{4}$.

Если $\cos x = 0$, то второе уравнение не имеет решений. При $\cos x \neq 0$ рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно y. Дискриминант равен $\cos^2 x - 2\sqrt{15}\cos x = \cos x(\cos x - 2\sqrt{15})$. Чтобы уравнение имело действительные решения, нужно, чтобы дискриминант был неотрицателен. Выражение $\cos x - 2\sqrt{15}$ отрицательно при всех возможных x, значит, $\cos x < 0$.

Следовательно, случай $\sin x = 1$ невозможен, а из $\sin x = -\dfrac{1}{4}$ находим: $x = \pi + \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

При этом $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Второе уравнение принимает вид: $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}y^2 - \dfrac{\sqrt{15}}{4}y + \dfrac{\sqrt{15}}{2} = 0$, откуда: $y^2 + y - 2 = 0$. Значит, $y = 1$ или $y = -2$.

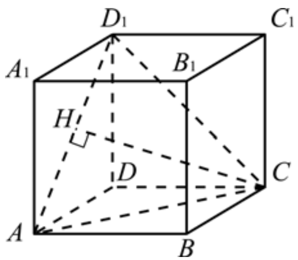
Ответ: $\left(\pi + \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi k;\ -2\right)$; $\left(\pi + \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi k;\ 1\right)$, $k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой AD_1.

Решение.

Проведем отрезки CD_1 и AC. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра CH, проведенного к прямой AD_1. Этот перпендикуляр является медианой равностороннего треугольника ACD_1 со стороной $\sqrt{2}$.



$CH = \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.

Решение.

Так как $0 < 5^{-|x-2|} \leq 1$ и $\log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2(2 - (x-2)^2) \leq 1$,

приходим к системе $\begin{cases} \log_2\left(4x - x^2 - 2\right) = 1, \\ 5^{-|x-2|} = 1. \end{cases}$ Получаем: $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Не сделана оценка $5^{-|x-2|} > 0$ или не рассмотрен случай отрицательных множителей. Ответ верный	2
Получен верный ответ равносильными преобразованиями или с помощью оценок, но не доказано отсутствие других решений. Или при верном ходе решения ответ неверный, или отсутствует за счет вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

Решение.

Пусть центры окружностей O_1 и O_2, а точки касания A и B. Проведем через точку B прямую, параллельную O_1O_2. Точку пересечения этой прямой с O_1A обозначим K. Треугольник KAB прямоугольный.
Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

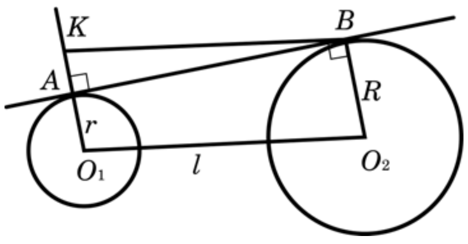


Рис. 1

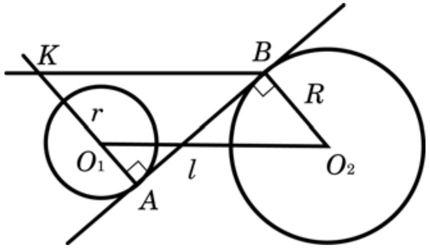


Рис. 2

1. Окружности лежат по одну сторону от касательной (рисунок 1).
2. Окружности лежат по разные стороны от касательной (рисунок 2).

Обозначим радиусы окружностей R и r, расстояния между центрами окружностей l.
В первом случае $AK = R - r$, во втором случае $AK = R + r$.
Из прямоугольного треугольника KAB находим:
в первом случае $AB = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$,
во втором случае $AB = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14$.

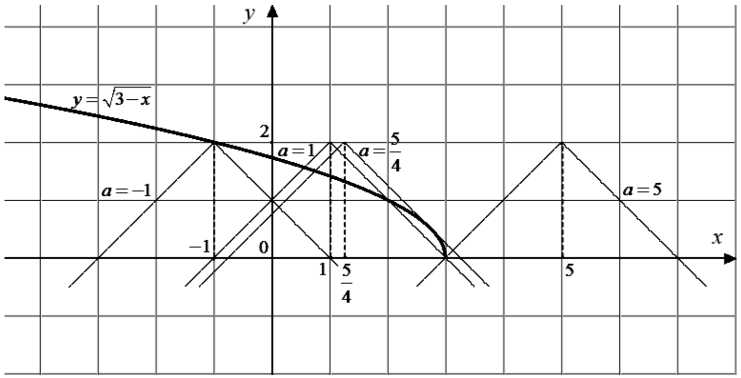
Ответ: 48 или 14.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x} + |x-a| \le 2$ является отрезок.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{3-x} \le 2 - |x-a|$, и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Рассматривая взаимное расположение графиков при разных a, получаем: $-1 < a < 1$ или $1,25 \le a < 5$.

Ответ: $(-1; 1) \cup \left[\frac{5}{4}; 5\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери или приобретения одного из значений параметра	3
Получен ответ: $-1 < a < 5$ (возможно включение концов). В решении представлена правильная графическая интерпретация или соответствующие ей равносильные преобразования	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра	1
Все ситуации, отличные от описанных выше	0

C6 Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

Решение.

Пусть r – число рейсов автобусов типа А, каждый из которых перевозит n школьников ($r \in N, n \in N, r \ge 2, \ n \ge 8$), M – число школьников в группе. Тогда

$$\begin{cases} 2rn = M, \\ 3(r-1)(n-7) = M. \end{cases}$$

Необходимо найти максимальное натуральное M, при котором система имеет решение $r \in N, n \in N, r \geq 2,\ n \geq 8$.

Заметим, что НОД$(2, 3) = 1 =$ НОД$(r, r-1)$,

а НОД$(n, n-7) = 1$ или НОД$(n, n-7) = 7$. Откуда $n = 7k\ (k \in N)$ и

$2rk = 3(r-1)(k-1)$,

где $r \geq 2,\ \ k \geq 3$. Если $r=2$, то k $= -3$. Значит, $r>2$.

Переписывая уравнение, получаем $r(k-3) = 3k-3$.

Заметим, что $k = 3,\ \ r = 3$ – не решения, поэтому $r = \dfrac{3k-3}{k-3} = 3 + \dfrac{6}{k-3}$.

Значит $k-3$ равно одному из чисел: $1,\ 2, 3, 6$.

Далее, перебором находим:

$k = 4,\ \ r = 9,\ \ M = 504;$

$k = 5,\ \ r = 6,\ \ M = 420;$

$k = 6,\ \ r = 5,\ \ M = 420;$

$k = 9,\ \ r = 4,\ \ M = 504.$

Ответ: 504.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ, возможно, неверный из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора, основанная на свойствах делимости	3
Ответ, возможно, неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием аналитических соображений	2
Решения ищутся прямым перебором без обоснований и ограничений. Ответ верный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0